

На правах рукописи

ЗАРЕМБО Екатерина Викторовна

**МЕТОД ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ
НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СОПРЯЖЕНИЯ
НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ТЕ- И ТМ-ВОЛН,
РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В СЛОЕ
С ПРОИЗВОЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ**

Специальность 01.01.02 – Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

КАЗАНЬ 2012

Работа выполнена на кафедре математики и суперкомпьютерного моделирования ФГБОУ ВПО «Пензенский государственный университет».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор, зав. кафедрой математики
и суперкомпьютерного моделирования
ФГБОУ ВПО «Пензенский
государственный университет»
Смирнов Юрий Геннадьевич

Официальные оппоненты: **Карчевский Евгений Михайлович**
доктор физико-математических наук,
доцент, кафедра прикладной математики
ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский)
федеральный университет»

Самохин Александр Борисович
доктор физико-математических наук,
профессор, зав. кафедрой прикладной
математики ФГБОУ ВПО «Московский
государственный технический университет
радиотехники, электроники и автоматики»

Ведущая организация: ФГБОУ ВПО «Московский
государственный университет
им. М. В. Ломоносова»

Защита состоится 18 октября 2012 г. в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35, ауд. 218.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. Н. И. Лобачевского ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35.

Автореферат разослан «__» сентября 2012 года и размещен на официальном сайте ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»: www.kpfu.ru

Ученый секретарь
диссертационного совета

Липачев Е. К.

Общая характеристика работы

Диссертация посвящена решению нелинейных краевых задач сопряжения на собственные значения для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих распространение электромагнитных ТМ- и ТЕ-волн в нелинейной среде с произвольной нелинейностью.

Актуальность темы

Задачи распространения электромагнитных волн в нелинейных средах интенсивно изучаются несколько десятилетий. К таким задачам относится распространение волн в волноведущих структурах и, в частности, распространение волн в диэлектрических слоях и диэлектрических цилиндрических волноводах. Явления распространения электромагнитных волн в нелинейных средах находят широкое применение, например: в физике плазмы, в современной микроэлектронике, в оптике, в лазерной технике. Они представляют и самостоятельный математический интерес, поскольку описываются нелинейными задачами сопряжения на собственные значения, общие методы решения которых недостаточно разработаны. Таким образом, прогресс в аналитическом исследовании подобных задач важен и с теоретической, и с практической точек зрения. Разработка численных методов для решения задач этого класса также является актуальной. Данное направление было и является предметом исследования многих авторов (В. П. Силин, П. Н. Елеонский¹, В. С. Серов, Ю. В. Шестопалов, Н. W. Shürmann², Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов³, A. D. Boardman⁴, K. M. Leung⁵).

Цели работы:

- исследовать задачи о распространении ТМ- и ТЕ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном слое с произвольной нелинейностью;
- сформулировать метод исследования нелинейных краевых задач сопряжения на собственные значения, описывающих процессы распространения ТМ- и ТЕ-волн;
- исследовать разрешимость рассматриваемых нелинейных задач;
- разработать метод нахождения приближенных собственных значений рассматриваемых задач.

¹Eleonskii P. N., Silin V. P. Nonlinear theory of penetration of p-polarized waves into a conductor // Soviet Physics JETP. – 1971. – V. 33, № 5. – P. 1039–1044.

²Schürmann H. W., Serov V. S., Shestopalov Yu. V. Reflection and transmission of a plane TE-wave at a lossless nonlinear dielectric film // Physica D. – 2001. – № 158. – P. 197–215.

³Валовик Д. В., Смирнов Ю. Г. Распространение электромагнитных волн в нелинейных слоистых средах. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2010. – 264 с.

⁴Ponath H.-E., Stegeman G. I. (editors) Modern problems in condensed matter sciences. V. 29. Nonlinear surface electromagnetic phenomena. – North-Holland: Elsevier Science Publishers, 1991.

⁵Leung K. M. P-polarized nonlinear surface polaritons in materials with intensity-dependent dielectric functions // Physical Review B. – 1985. – V. 32, № 8. – P. 5093–5101.

Основные результаты диссертационной работы:

1. Для исследования процессов распространения электромагнитных ТМ- и ТЕ-волн в нелинейных слоях, сводящихся к нелинейным задачам сопряжения на собственные значения, разработан, обоснован и реализован метод задачи Коши.

2. Для рассматриваемых нелинейных задач сопряжения на собственные значения доказаны теоремы существования и локализации собственных значений.

3. Предложен модифицированный метод интегральных дисперсионных уравнений для нелинейных краевых задач сопряжения на собственные значения, описывающих распространение электромагнитных ТМ- и ТЕ-волн в нелинейных слоях. Проведено сравнение численных результатов.

Научная новизна:

– для теоретического и численного исследования рассматриваемых нелинейных задач сопряжения на собственные значения применен метод задачи Коши;

– доказаны теоремы существования и локализации собственных значений для рассматриваемых нелинейных задач сопряжения.

Теоретическая и практическая значимость

Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы для разработки методов исследования нелинейных задач сопряжения (в том числе на собственные значения) в многосвязных областях для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Отметим, что предложенный в рассматриваемой работе метод нахождения приближенных собственных значений может быть использован для практического нахождения постоянных распространения волноведущих структур и обладает следующими достоинствами: метод эффективен и прост в реализации; метод позволяет находить приближенные собственные значения с любой заданной точностью.

Перечисленные достоинства позволяют говорить о большой практической значимости предложенного метода.

Реализация и внедрение полученных результатов

Результаты, полученные в диссертации, включены в отчеты НИР и грантов, выполненных на кафедре математики и суперкомпьютерного моделирования ФГБОУ ВПО «Пензенский государственный университет»: РФФИ 11-07-00330-а.

Апробация работы

Основные результаты работы докладывались на научных конференциях и семинарах:

- Международной конференции «Days on Diffraction – 2007» (Россия, Санкт-Петербург, 2007);
- V Всероссийской межвузовской конференции молодых ученых (Россия, Санкт-Петербург, 2008);
- IX Всероссийской школе-семинаре «Волновые явления в неоднородных средах» («Волны-2008») (Россия, Москва, 2008);
- VI Всероссийской межвузовской конференции молодых ученых (Россия, Санкт-Петербург, 2009);
- X Всероссийской школе-семинаре «Волновые явления в неоднородных средах» («Волны-2009») (Россия, Москва, 2009);
- Научном семинаре кафедры дифференциальных уравнений Казанского (Приволжского) федерального университета (Россия, Казань, 2012);
- Международной конференции «32nd Progress in Electromagnetics Research Symposium (PIERS)» (Россия, Москва, 19–23 августа 2012 г.);
- Международной конференции «14th Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET2012)» (Украина, Харьков, 27–31 августа 2012 г.).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1–7]. Работы [1–5] опубликованы в журналах, входящих в перечень изданий, рекомендованных ВАК РФ.

Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, списка литературы, содержащего **65** наименований, и приложения. Полный объем диссертации **109** страниц текста с **24** рисунками.

Содержание диссертации

Во **введении** приводится обзор работ по теме диссертации и вопросам, примыкающим к ней; обосновывается актуальность темы, формулируется цель работы, излагаются краткое содержание и основные результаты диссертации.

Первая глава посвящена постановке и решению нелинейной краевой задачи сопряжения на собственные значения для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих распространение

электромагнитных ТМ-волн в анизотропном однородном немагнитном диэлектрическом слое. Сформулировано понятие собственного значения рассматриваемой нелинейной задачи. Доказаны теоремы о существовании и единственности решения и непрерывной зависимости решения от параметра вспомогательной задачи Коши; доказана теорема о существовании и локализации собственных значений. Предложен модифицированный метод интегральных дисперсионных уравнений.

Рассмотрим электромагнитные волны, распространяющиеся через однородный, анизотропный, немагнитный диэлектрический слой, расположенный между двумя полупространствами $x < 0$ и $x > h$ в декартовой системе координат $Oxyz$. Полупространства заполнены изотропной немагнитной средой без источников и имеют постоянную диэлектрическую проницаемость ε_1 и ε_3 соответственно ($\varepsilon_1, \varepsilon_3$ – произвольные действительные числа). Всюду μ – магнитная проницаемость вакуума. Геометрия задачи представлена на рис. 1.

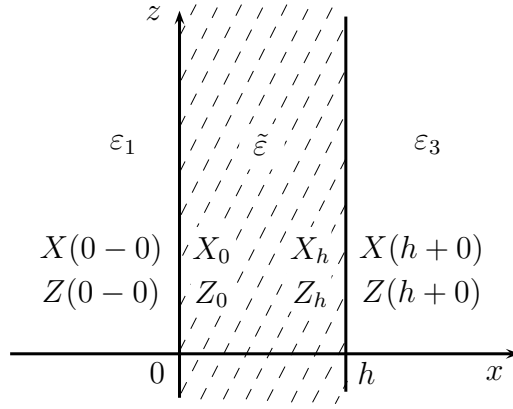


Рис. 1. Геометрия задачи

Электромагнитное поле \vec{E} и \vec{H} удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = -i\omega\varepsilon\vec{E}, \\ \text{rot } \vec{E} = i\omega\mu\vec{H}, \end{cases} \quad (1)$$

условию непрерывности касательных составляющих электромагнитного поля на границе раздела сред $x = 0$ и $x = h$, а также условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле экспоненциально затухает при $|x| \rightarrow \infty$ в областях $x < 0$ и $x > h$.

Диэлектрическая проницаемость внутри слоя имеет вид

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_f + \varepsilon_0 f(|E_x|^2, |E_z|^2)$ и $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_g + \varepsilon_0 g(|E_x|^2, |E_z|^2)$. Вид элемента ε_{yy} здесь не описан, поскольку в силу поляризации этот элемент не входит

в изучаемые уравнения. Здесь $\varepsilon_f, \varepsilon_g$ – постоянные составляющие диэлектрических проницаемостей $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{zz}$; $f(u, v)$ – однократно непрерывно дифференцируемая по обоим аргументам функция; $g(u, v)$ – непрерывная по обоим аргументам функция.

Будем искать решения уравнений Максвелла во всем пространстве.

Рассмотрим ТМ-волны $\vec{E} = (E_x, 0, E_z)^T$, $\vec{H} = (0, H_y, 0)^T$, где $E_x = E_x(x, y, z)$, $E_z = E_z(x, y, z)$, $H_y = H_y(x, y, z)$.

Можно показать, что для рассматриваемой геометрии компоненты E_x, E_z, H_y не зависят от переменной y . Волны, распространяющиеся вдоль границы z раздела сред, гармонически зависят от z . Учитывая сказанное, получаем, что компоненты полей \vec{E} и \vec{H} имеют представление

$$E_x = E_x(x)e^{i\gamma z}, \quad E_z = E_z(x)e^{i\gamma z}, \quad H_y = H_y(x)e^{i\gamma z}, \quad (2)$$

где γ – неизвестный спектральный параметр (постоянная распространения).

Подставив (2) в (1), выполнив нормировку в соответствии с формулами $\tilde{x} = kx$, $\frac{d}{dx} = k\frac{d}{d\tilde{x}}$, $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{k}$, $\tilde{\varepsilon}_j = \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_0}$ ($j = 1, 2, 3$), где $k_0^2 = \omega^2\mu\varepsilon_0$, используя обозначения $Z(\tilde{x}) := E_z$, $X(\tilde{x}) := iE_x$ и опуская значок тильды, получаем

$$\begin{cases} -Z'' + \gamma X' = \varepsilon_{zz}Z, \\ -Z' + \gamma X = \gamma^{-1}\varepsilon_{xx}X. \end{cases} \quad (3)$$

Считаем, что

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1, & x < 0, \\ \tilde{\varepsilon}, & 0 < x < h, \\ \varepsilon_3, & x > h, \end{cases}$$

и $\tilde{\varepsilon}$ – тензор, определенный выше. При $x < 0$ и $x > h$ в системе (3) мы полагаем, что $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{zz} = \text{const}$ и равно ε_1 или ε_3 соответственно.

Решения системы (3) в полупространствах $x < 0$ и $x > h$ с учетом условия на бесконечности имеют вид

$$X(x) = \begin{cases} X(0-0)e^{x\sqrt{\gamma^2-\varepsilon_1}}, & x < 0, \\ X(h+0)e^{-(x-h)\sqrt{\gamma^2-\varepsilon_3}}, & x > h; \end{cases} \quad (4)$$

$$Z(x) = \begin{cases} \gamma^{-1}\sqrt{\gamma^2-\varepsilon_1}X(0-0)e^{x\sqrt{\gamma^2-\varepsilon_1}}, & x < 0, \\ -\gamma^{-1}\sqrt{\gamma^2-\varepsilon_3}X(h+0)e^{-(x-h)\sqrt{\gamma^2-\varepsilon_3}}, & x > h, \end{cases} \quad (5)$$

где $X(0-0)$ известна; $X(h+0)$ определяется из условий сопряжения.

Внутри слоя система (3) в нормальной форме имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dX}{dx} = \frac{\gamma^2(\varepsilon_g+g)+2(\varepsilon_f-\gamma^2+f)X^2f'_v}{\gamma(2X^2f'_u+\varepsilon_f+f)}Z, \\ \frac{dZ}{dx} = \frac{1}{\gamma}(\gamma^2 - \varepsilon_f - f)X, \end{cases} \quad (6)$$

где $f'_u = \frac{df}{dX^2}$, $f'_v = \frac{df}{dZ^2}$ (далее эти производные понимаются в этом смысле).

Из условий сопряжения для компонент электромагнитного поля получаем следующие условия сопряжения для функций X и Z :

$$[\varepsilon X]|_{x=0} = 0, \quad [\varepsilon X]|_{x=h} = 0, \quad [Z]|_{x=0} = 0, \quad [Z]|_{x=h} = 0, \quad (7)$$

где $[f]|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$.

Введем обозначения для граничных значений функций $X(x)$ и $Z(x)$ на границах слоя $0 < x < h$ изнутри:

$$X_0 := X(0+0), \quad X_h := X(h-0), \quad Z_0 := Z(0+0), \quad Z_h := Z(h-0).$$

Из формул (4), (5) получаем начальные условия для (6):

$$X(0) := X_0, \quad Z(0) := Z_0, \quad (8)$$

где X_0 определяется из условий (7); $Z_0 = \gamma^{-1} \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1} X(0-0)$.

Обозначим $f_0 = f(X_0^2, Z_0^2)$, $f_h = f(X_h^2, Z_h^2)$, тогда из (7) получаем

$$\varepsilon_1 X(0-0) = (\varepsilon_f + f_0) X_0; \quad \varepsilon_3 X(h+0) = (\varepsilon_f + f_h) X_h. \quad (9)$$

Определение 1. Число $\gamma = \tilde{\gamma}$, при котором существуют нетривиальные решения $X(x)$ и $Z(x)$ системы уравнений (6) внутри слоя, удовлетворяющие условиям сопряжения (7) и представимые в виде (4), (5) в полупространствах $x < 0$ и $x > h$, будем называть собственным значением рассматриваемой задачи. Функции $X(x)$ и $Z(x)$, которые соответствуют найденному собственному значению $\tilde{\gamma}$, будем называть собственными функциями задачи.

Теперь мы можем сформулировать нелинейную задачу сопряжения на собственные значения (задача P_M): необходимо найти собственные значения γ , для которых существуют нетривиальные функции $X(x)$ и $Z(x)$ такие, что при $x < 0$ и $x > h$ функции X и Z определяются выражениями (4), (5), где $X(0-0)$ – известная величина, а $X(h+0)$ находится из условий сопряжения (7); при $0 < x < h$ функции X и Z удовлетворяют системе (6); функции X и Z удовлетворяют условиям сопряжения (7).

Введем некоторые обозначения. Пусть $\sqrt{\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)} < \gamma_* < \gamma^* < \infty$, $\gamma \in [\gamma_*, \gamma^*]$ и $b, b_\gamma < \infty$ – некоторые постоянные. Определим множества

$$\Pi := \{(X, Z) : |X - X_0| \leq b, |Z - Z_0| \leq b\},$$

$$\Pi_\gamma := \{(X, Z, \gamma) : |X - X_0| \leq b_\gamma, |Z - Z_0| \leq b_\gamma, \gamma \in [\gamma_*, \gamma^*]\}.$$

Пусть P и Q – правые части уравнений системы (6), и числа M, M_γ таковы, что

$$M \geq \max_{\Pi} |P|, \quad M \geq \max_{\Pi} |Q|, \quad M_\gamma \geq \max_{\Pi_\gamma} |P|, \quad M_\gamma \geq \max_{\Pi_\gamma} |Q|.$$

Можно показать, что имеют место следующие утверждения.

Утверждение 1. Решение задачи Коши для системы (6) с начальными условиями (8) непрерывно дифференцируемо, единственно и существует при всех $x \in [0, h]$, где $h \leq b/M$.

Утверждение 2. Решение $X(x, \gamma), Z(x, \gamma)$ задачи Коши для системы (6) с начальными условиями (8) непрерывно дифференцируемо относительно x , единственно и существует при всех $x \in [0, h]$, где $h \leq b_\gamma/M_\gamma$, и непрерывно зависит от γ , для всех $\gamma \in [\gamma_*, \gamma^*]$.

Величина $X(h+0, \gamma)$ является неизвестной и подлежит определению. Из условий сопряжения (7) получаем

$$X(h+0, \gamma) = \varepsilon_3^{-1} (\varepsilon_f + f(X^2(h-0, \gamma), Z^2(h-0, \gamma))) X(h-0, \gamma)$$

$$\text{и } Z(h+0, \gamma) = -\gamma^{-1} \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3} X(h+0, \gamma).$$

Величины $X(h-0, \gamma)$ и $Z(h-0, \gamma)$ определяются из решения рассматриваемой задачи Коши. Пусть

$$F(h, \gamma) := Z(h-0, \gamma) - Z(h+0, \gamma) = Z(h-0, \gamma) + \gamma^{-1} \varepsilon_3^{-1} \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3} (\varepsilon_f + f(X^2(h-0, \gamma), Z^2(h-0, \gamma))) X(h-0, \gamma).$$

Тогда если число $\gamma = \tilde{\gamma}$ таково, что $F(h, \tilde{\gamma}) = 0$, то $\tilde{\gamma}$ является собственным значением задачи P_M .

Теорема 1. Пусть выполняются условия утверждения 2 и пусть отрезок $[\underline{\gamma}, \bar{\gamma}] \subset [\gamma_*, \gamma^*]$ таков, что $F(h, \underline{\gamma})F(h, \bar{\gamma}) < 0$. Тогда существует по крайней мере одно собственное значение $\tilde{\gamma} \in [\underline{\gamma}, \bar{\gamma}]$ задачи P_M .

Перейдем к формулировке модифицированного метода интегральных дисперсионных уравнений (МИДУ), который позволяет найти точное дисперсионное уравнение для спектрального параметра задачи P_M .

Введем новые переменные: $\tau(x) = \varepsilon_f + X^2(x)$ и $\eta(x) = X(x)Z^{-1}(x)\tau(x)$, откуда получим, что $X^2 = \tau - \varepsilon_2$, $XZ = (\tau - \varepsilon_f)\tau\eta^{-1}$, $Z^2 = (\tau - \varepsilon_2)\tau^2\eta^{-2}$. Полагаем, что $f \equiv f(\tau - \varepsilon_f, (\tau - \varepsilon_f)\tau^2\eta^{-2})$, $g \equiv g(\tau - \varepsilon_f, (\tau - \varepsilon_f)\tau^2\eta^{-2})$.

Система (6) в новых переменных примет вид

$$\begin{cases} \tau' = 2\gamma^{-1}\tau\eta^{-1}(\tau - \varepsilon_f)\chi, \\ \eta' = \gamma^{-1} [\eta^2\tau^{-1}(\varepsilon_f - \gamma^2 + f) + (3\tau - 2\varepsilon_f)\chi], \end{cases} \quad (10)$$

$$\text{здесь и далее } f'_u = \left. \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \right|_{(\tau - \varepsilon_f, \tau^2\eta^{-2}(\tau - \varepsilon_f))}, \quad f'_v = \left. \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} \right|_{(\tau - \varepsilon_f, \tau^2\eta^{-2}(\tau - \varepsilon_f))},$$

$$\chi = [\gamma^2(\varepsilon_g + g) + 2(\tau - \varepsilon_f)(\varepsilon_f - \gamma^2 + f)f'_v][2(\tau - \varepsilon_f)f'_u + \varepsilon_f + f]^{-1}.$$

Тогда получим

$$\frac{d\tau}{d\eta} = [2\tau\eta^{-1}(\tau - \varepsilon_f)\chi] [\eta^2\tau^{-1}(\varepsilon_f - \gamma^2 + f) + (3\tau - 2\varepsilon_f)\chi]^{-1}. \quad (11)$$

Будем полагать функции f и g таковыми, что правая часть второго уравнения системы (10) положительна.

Теперь мы можем найти знаки выражений $\eta(0)$ и $\eta(h)$. Как видно из (4), (5), (9), величины X_0 и Z_0 либо одновременно положительны, либо одновременно отрицательны. В то же время из (4), (5), (9) следует, что X_h и Z_h противоположных знаков. Учитывая сказанное для $\eta(0)$ и $\eta(h)$, получаем

$$\eta(0) = X_0 Z_0^{-1} (\varepsilon_f + X_0^2) > 0, \quad \eta(h) = -X_h Z_h^{-1} (\varepsilon_f + X_h^2) < 0. \quad (12)$$

Правая часть второго уравнения (10) положительна, это значит, что функция η возрастает при $x \in (0, h)$. Но из (12) видно, что функция $\eta(x)$ не может быть дифференцируема на всем интервале $(0, h)$, а необходимо имеет точку разрыва.

Можно показать, что решения X, Z системы (6) при аналитических правых частях являются аналитическими функциями. Значит, функция η может иметь разрывы только второго рода. Эти разрывы есть полюса функции η , которые находятся в нулях функции Z .

Дисперсионное уравнение имеет вид

$$\int_{\eta(0)}^{\eta(h)} w d\eta + (N + 1)T = h, \quad (13)$$

где $N \geq 0$ – целое число; $\eta(0), \eta(h)$ определяются формулами (12); $w \equiv w(\eta) = \gamma^{-1} [\eta^2 \tau^{-1} (\varepsilon_f - \gamma^2 + f) + (3\tau - 2\varepsilon_f)\chi]^{-1}$ и $\tau = \tau(\eta)$ определяется из решения задачи Коши для уравнения (11) с начальными условиями $\eta(0) = X_0 Z_0^{-1} (\varepsilon_f + X_0^2)$, $\tau(0) = \varepsilon_f + X_0^2$ и $T \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} w d\eta$.

Дисперсионное уравнение (13) справедливо для любого конечного h . Когда $N \neq 0$, возникает несколько уравнений при различных значениях N . Необходимо решать относительно γ каждое из получающихся уравнений.

Для того чтобы вычислить значение h для конкретного γ^* из уравнения (13), поступаем следующим образом. Пределы интегрирования в (13) при заданном γ^* известны. Для вычисления интегралов в (13) используем какой-либо из известных численных методов. Важный момент заключается в том, что при вычислении любого слагаемого в интегральной сумме (квадратурной формуле) необходимо вычислить значение подынтегральной функции в некоторой точке $\bar{\eta}$. Но в подынтегральную функцию входит $\tau \equiv \tau(\eta)$. Поскольку мы решили задачу Коши для уравнения (13) с начальными данными $\eta(0), \tau(0)$, то теперь, находя из этого решения значение τ , соответствующее значению $\bar{\eta}$, мы получаем $\tau(\bar{\eta})$.

Вторая глава посвящена постановке и решению нелинейной краевой задачи сопряжения на собственные значения для распространяющихся поляризованных электромагнитных ТЕ-волн в изотропном однородном немагнитном диэлектрическом слое. Сформулировано понятие собственного значения рассматриваемой нелинейной задачи. Доказаны теоремы о существовании и единственности решения и непрерывной зависимости решения от параметра вспомогательной задачи Коши; доказана теорема о существовании и локализации собственных значений. Предложен модифицированный метод интегральных дисперсионных уравнений.

Рассмотрим электромагнитные волны, распространяющиеся через однородный, изотропный, немагнитный диэлектрический слой, расположенный между полупространствами $x < 0$ и $x > h$ в декартовой системе координат $Oxyz$. Полупространства заполнены изотропной немагнитной средой без источников и имеют постоянную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_1, \varepsilon_3$ соответственно ($\varepsilon_1, \varepsilon_3$ – произвольные действительные числа). Всюду μ – магнитная проницаемость вакуума. Геометрия задачи представлена на рис. 2.

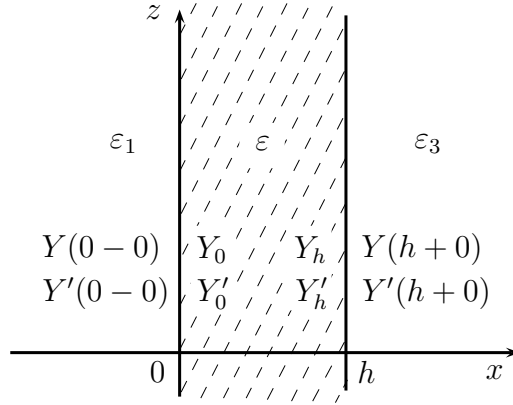


Рис. 2. Геометрия задачи

Электромагнитное поле \vec{E} и \vec{H} удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = -i\omega\varepsilon\vec{E}, \\ \text{rot } \vec{E} = i\omega\mu\vec{H}, \end{cases} \quad (14)$$

условию непрерывности касательных составляющих электромагнитного поля на границе раздела сред $x = 0$ и $x = h$, а также условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле экспоненциально затухает при $|x| \rightarrow \infty$ в областях $x < 0$ и $x > h$.

Диэлектрическая проницаемость внутри слоя имеет вид

$$\varepsilon = \varepsilon_2 + \varepsilon_0 f(|\vec{E}|^2),$$

где ε_2 – постоянная составляющая диэлектрической проницаемости ε ; ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума; $f(x)$ – непрерывная функция.

Будем искать решение уравнений Максвелла во всем пространстве.

Рассмотрим ТЕ-волны: $\vec{E} = (0, E_y, 0)^T$, $\vec{H} = (H_x, 0, H_z)^T$, где $E_y = E_y(x, y, z)$, $H_x = H_x(x, y, z)$, $H_z = H_z(x, y, z)$.

Можно показать, что для рассматриваемой геометрии компоненты электромагнитного поля не зависят от y . Волны, распространяющиеся вдоль границы z раздела сред, гармонически зависят от z . Учитывая сказанное, получаем, что компоненты полей \vec{E} и \vec{H} имеют представление

$$E_y = E_y(x)e^{i\gamma z}, \quad H_x = H_x(x)e^{i\gamma z}, \quad H_z = H_z(x)e^{i\gamma z}, \quad (15)$$

где γ – неизвестный спектральный параметр (постоянная распространения).

Подставив (15) в (14), выполнив нормировку в соответствии с формулами $\tilde{x} = kx$, $\frac{d}{dx} = k\frac{d}{d\tilde{x}}$, $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{k}$, $\tilde{\varepsilon}_j = \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_0}$ ($j = 1, 2, 3$), где $k_0^2 = \omega^2\mu\varepsilon_0$, используя обозначение $Y(\tilde{x}) := E_y$ и опуская значок тильды, получаем

$$Y''(x) = (\gamma^2 - \tilde{\varepsilon}) Y(x). \quad (16)$$

Считаем, что

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon_1, & x < 0, \\ \varepsilon_2 + f(Y^2), & 0 < x < h, \\ \varepsilon_3, & x > h. \end{cases}$$

Решения уравнения (16) в полупространствах $x < 0$ и $x > h$ с учетом условия на бесконечности имеют вид

$$Y(x) = \begin{cases} Y(0-0)e^{x\sqrt{\gamma^2-\varepsilon_1}}, & x < 0, \\ Y(h+0)e^{-(x-h)\sqrt{\gamma^2-\varepsilon_3}}, & x > h; \end{cases} \quad (17)$$

$$Y'(x) = \begin{cases} \sqrt{\gamma^2-\varepsilon_1}Y(0-0)e^{x\sqrt{\gamma^2-\varepsilon_1}}, & x < 0, \\ -\sqrt{\gamma^2-\varepsilon_3}Y(h+0)e^{-(x-h)\sqrt{\gamma^2-\varepsilon_3}}, & x > h, \end{cases} \quad (18)$$

где $Y(0-0)$ известна; $Y(h+0)$ определяется из условий сопряжения.

Внутри слоя уравнение (16) имеет вид

$$Y''(x) = (\gamma^2 - \varepsilon_2 - f(Y^2)) Y(x). \quad (19)$$

Из непрерывности касательных составляющих электромагнитного поля получаем следующие условия сопряжения для функций Y и Y' :

$$[Y]|_{x=0} = 0, \quad [Y]|_{x=h} = 0, \quad [Y']|_{x=0} = 0, \quad [Y']|_{x=h} = 0, \quad (20)$$

где $[f]|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$.

Введем обозначения для граничных значений функций $Y(x)$ и $Y'(x)$ на границах слоя $0 < x < h$ изнутри

$$Y_0 := Y(0+0), \quad Y_h := Y(h-0), \quad Y'_0 := Y'(0+0), \quad Y'_h := Y'(h-0).$$

Из условий сопряжения (20) получаем

$$Y_0 = Y(0-0), \quad Y_h = Y(h+0), \quad Y'_0 = \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}Y_0, \quad Y'_h = -\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}Y_h. \quad (21)$$

Определение 2. Число $\gamma = \tilde{\gamma}$, при котором существует нетривиальное решение $Y(x)$ уравнения (16) внутри слоя, удовлетворяющее условиям сопряжения (20) и представимое в виде (17) в полупространствах $x < 0$ и $x > h$, будем называть собственным значением рассматриваемой задачи. Функцию $Y(x)$, которая соответствует найденному собственному значению $\gamma = \tilde{\gamma}$, будем называть собственной функцией задачи.

Теперь мы можем сформулировать нелинейную задачу сопряжения на собственные значения (*задача P_E*): необходимо найти собственные значения γ , для которых существуют нетривиальные функции $Y(x)$ и Y' такие, что при $x < 0$ и $x > h$ функция Y определяется выражениями (17), где $Y(0-0)$ – известная величина, а $Y(h+0)$ определяется из условий сопряжения; при $0 < x < h$ функция Y удовлетворяет уравнению (19); функции Y и Y' удовлетворяют условиям сопряжения (20).

Запишем уравнение (19) в виде системы. Пусть $Y_1 := Y$, $Y_2 := Y'$, тогда

$$\begin{cases} Y_1' = Y_2, \\ Y_2' = (\gamma^2 - \varepsilon_2 - f(Y_1^2))Y_1. \end{cases} \quad (22)$$

Из формул (21) получаем начальные условия для (22)

$$Y_1(0) = Y_0, \quad Y_2(0) = \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}Y_0. \quad (23)$$

Введем некоторые обозначения. Пусть $\sqrt{\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)} < \gamma_* < \gamma^* < \infty$, $\gamma \in [\gamma_*, \gamma^*]$ и $b, b_\gamma < \infty$ – некоторые постоянные. Определим множества

$$\begin{aligned} \Pi &:= \left\{ (Y_1, Y_2) : |Y_1 - Y_0| \leq b, |Y_2 - \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}Y_0| \leq b \right\}, \\ \Pi_\gamma &:= \left\{ (Y_1, Y_2, \gamma) : |Y_1 - Y_0| \leq b_\gamma, |Y_2 - \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}Y_0| \leq b_\gamma, \gamma \in [\gamma_*, \gamma^*] \right\}. \end{aligned}$$

Пусть P и Q – правые части уравнений системы (22), числа M, M_γ таковы, что

$$M \geq \max_{\Pi} |P|, \quad M \geq \max_{\Pi} |Q|, \quad M_\gamma \geq \max_{\Pi_\gamma} |P|, \quad M_\gamma \geq \max_{\Pi_\gamma} |Q|.$$

Можно показать, что имеют место следующие утверждения.

Утверждение 3. *Решение задачи Коши для системы (22) с начальными условиями (23) непрерывно дифференцируемо, единственно и существует при $x \in [0, h]$, где $h \leq b/M$.*

Утверждение 4. *Решение $Y_1(x, \gamma), Y_2(x, \gamma)$ задачи Коши для системы (22) с начальными условиями (23) непрерывно дифференцируемо относительно x , единственно и существует при всех $x \in [0, h]$, где $h \leq b_\gamma/M_\gamma$, и непрерывно зависит от γ для всех $\gamma \in [\gamma_*, \gamma^*]$.*

Используя условия сопряжения (20), мы получаем, что

$$Y_1(h-0, \gamma) = Y_1(h+0, \gamma), \quad Y_2(h-0, \gamma) = Y_2(h+0, \gamma), \quad (24)$$

причем $Y_1(h-0, \gamma)$ и $Y_2(h-0, \gamma)$ есть предельные значения решения задачи Коши на границе изнутри слоя. Из формул (21) получаем, что $Y_1(h+0, \gamma) = Y_h$ и $Y_2(h+0, \gamma) = -\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}Y_h$. Теперь, учитывая формулы (24), получаем, что

$$Y_1(h-0, \gamma) = Y_h, \quad Y_2(h-0, \gamma) = -\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}Y_h. \quad (25)$$

Но величина Y_h является неизвестной и подлежит определению. Из первой формулы (25) получаем, что $Y_h := Y_1(h - 0, \gamma)$. Пусть $F(h, \gamma) := Y_2(h - 0, \gamma) + \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3} Y_1(h - 0, \gamma)$. Тогда, если число $\gamma = \tilde{\gamma}$ таково, что $F(h, \tilde{\gamma}) = 0$, то $\tilde{\gamma}$ является собственным значением задачи P_E .

Теорема 2. Пусть выполняются условия утверждения 4 и пусть отрезок $[\underline{\gamma}, \overline{\gamma}] \subset [\gamma_*, \gamma^*]$ таков, что $F(h, \underline{\gamma})F(h, \overline{\gamma}) < 0$. Тогда существует по крайней мере одно собственное значение $\tilde{\gamma} \in (\underline{\gamma}, \overline{\gamma})$ задачи P_E .

Перейдем к формулировке модифицированного метода интегральных дисперсионных уравнений, который позволяет найти точное дисперсионное уравнение для спектрального параметра задачи P_E .

Введем новые переменные: $\tau(x) = \varepsilon_2 + Y_1^2(x)$, $\eta(x) = Y_1(x)Y_2^{-1}(x)\tau(x)$, откуда получим, что $Y_1^2 = \tau - \varepsilon_2$, $Y_1Y_2 = (\tau - \varepsilon_2)\tau\eta^{-1}$, $Y_2^2 = (\tau - \varepsilon_2)\tau^2\eta^{-2}$.

Система (22) примет вид (мы обозначили $\tau_0 = \varepsilon_2\gamma^{-2}$)

$$\begin{cases} \tau' = 2(\tau - \varepsilon_2)\tau\eta^{-1}, \\ \eta' = \gamma^2(\tau_0 - 1 + \gamma^{-2}f(\tau - \varepsilon_2))\eta^2\tau^{-1} + 3\tau - 2\varepsilon_2, \end{cases} \quad (26)$$

и

$$\frac{d\tau}{d\eta} = \frac{2(\tau - \varepsilon_2)\tau\eta^{-1}}{\gamma^2(\tau_0 - 1 + \gamma^{-2}f(\tau - \varepsilon_2))\eta^2\tau^{-1} + 3\tau - 2\varepsilon_2}. \quad (27)$$

Будем полагать функцию f такой, что правая часть второго уравнения системы (26) положительна.

Из начальных условий и условий сопряжения получаем $\tau(0) = \varepsilon_2 + Y_1^2(0)$, $\tau(h) = \varepsilon_2 + Y_1^2(h)$; поскольку значение $Y_1(0)$ известно, то и $\tau(0)$ известно.

Для $\eta(0)$ и $\eta(h)$ получаем

$$\eta(0) = \frac{\varepsilon_2 + Y_1^2(0)}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}} > 0, \quad \eta(h) = -\frac{\varepsilon_2 + Y_1^2(h)}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}} < 0. \quad (28)$$

Правая часть второго уравнения (26) положительна, это значит, что функция η возрастает при $x \in (0, h)$. Но из (28) видно, что функция $\eta(x)$ не может быть дифференцируема на всем интервале $(0, h)$, а необходимо имеет точку разрыва.

Можно показать, что решения Y уравнения (19) при аналитической правой части являются аналитическими функциями. Значит, функция η может иметь разрывы только второго рода. Эти разрывы есть полюса функции η , которые находятся в нулях функции Y' .

Дисперсионное уравнение имеет вид

$$-\int_{\eta(0)}^{\eta(h)} w d\eta + (N + 1)T = h, \quad (29)$$

где $N \geq 0$ – целое число; $\eta(0)$, $\eta(h)$ определены формулами (28); $\tau = \tau(\eta)$ определяется из решения задачи Коши для уравнения (27) с начальными условиями $\eta(0) = \frac{\varepsilon_2 + Y_1^2(0)}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}}$, $\tau(0) = \varepsilon_2 + Y_1^2(0)$ и $T \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} w d\eta$.

Дисперсионное уравнение (29) справедливо для любого конечного h . Когда $N \neq 0$, возникает несколько уравнений при различных значениях N . Необходимо решать относительно γ каждое из получающихся уравнений.

Для того чтобы вычислить значение h для конкретного γ^* из уравнения (29), поступаем следующим образом. Пределы интегрирования в (29) при заданном γ^* известны. Для вычисления интегралов в (29) используем какой-либо из известных численных методов. Важный момент заключается в том, что при вычислении любого слагаемого в интегральной сумме (квадратурной формуле) необходимо вычислить значение подынтегральной функции в некоторой точке $\bar{\eta}$. Но в подынтегральную функцию входит $\tau \equiv \tau(\eta)$. Поскольку мы решили задачу Коши для уравнения (29) с начальными данными $\eta(0)$, $\tau(0)$, то теперь, находя из этого решения значение τ , соответствующее значению $\bar{\eta}$, мы получаем $\tau(\bar{\eta})$.

Третья глава посвящена формулировке и обоснованию метода нахождения приближенных собственных значений рассматриваемых нелинейных задач. На основе результатов, изложенных в первых двух главах, изучены конкретные виды нелинейностей. Приведены как новые численные результаты, так и проведено сравнение с МИДУ.

Рассмотрим метод нахождения приближенных собственных значений для ТМ-волн (формулировка метода для ТЕ-волн аналогична).

Пусть $0 < h_* < h^* < \infty$ и $\sqrt{\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)} < \gamma_* < \gamma^* < \infty$ – некоторые числа. Считаем, что $h \in [h_*, h^*]$ и $\gamma \in [\gamma_*, \gamma^*]$. Разбиваем отрезки $[h_*, h^*]$ и $[\gamma_*, \gamma^*]$ на n и m частей соответственно. Имеем сетку $\{h_i, \gamma_j\}$, $i = \overline{0, n}$, $j = \overline{0, m}$; причем $h_0 = h_*$, $h_n = h^*$, $\gamma_0 = \gamma_*$, $\gamma_m = \gamma^*$. Тогда для каждой пары индексов (i, j) будем иметь пару начальных значений $(X_{ij}(0), Z_{ij}(0))$, где $X_{ij}(0) \equiv X_0$ и $Z_{ij}(0) = \gamma_j^{-1} \sqrt{\gamma_j^2 - \varepsilon_1} X(0 - 0)$, а X_0 определяется из уравнения $\varepsilon_1 X(0 - 0) = (\varepsilon_f + f(X_0^2, Z_0^2)) X_0$.

Поставим задачу Коши для системы (6) с начальным условием $X_{ij}(0)$, $Z_{ij}(0)$. Величина γ является параметром в системе (6), и решения этой системы зависят от γ . Решив указанную задачу Коши, получаем значения $X_{ij}(h) \equiv X_j(h_i)$ и $Z_{ij}(h) \equiv Z_j(h_i)$. Поскольку εX непрерывна при $x = h$, то это позволяет вычислить $X_{ij}(h+0) = \varepsilon_3^{-1} (\varepsilon_f + f(X_j^2(h_i), Z_j^2(h_i))) X_j(h_i)$.

Теперь, используя вторую формулу (5) и найденное $X_{ij}(h+0)$, находим $Z_{ij}(h+0) = -\gamma_j^{-1} \sqrt{\gamma_j^2 - \varepsilon_3} X_{ij}(h+0)$. Но значение $Z_{ij}(h-0)$ известно из решения задачи Коши. Принимая во внимание непрерывность $Z(x)$ на границе $x = h$, построим функцию

$$\begin{aligned} F(h_i, \gamma_j) &= Z_{ij}(h+0) - Z_{ij}(h-0) = \\ &= -\gamma_j^{-1} \varepsilon_3^{-1} \sqrt{\gamma_j^2 - \varepsilon_3} (\varepsilon_f + f(X_{ij}^2(h), Z_{ij}^2(h))) X_{ij}(h) - Z_{ij}(h). \end{aligned}$$

В диссертации показано, что $F(h_i, \gamma_j)$ является непрерывной функцией параметра γ . Пусть для заданного h_i существуют такие γ_j и γ_{j+1} , что

$F(h_i, \gamma_j) F(h_i, \gamma_{j+1}) < 0$. Значит, существует по крайней мере одно значение $\tilde{\gamma}_i \in (\gamma_j, \gamma_{j+1})$ такое, что $\tilde{\gamma}_j$ является собственным значением рассматриваемой задачи о распространении волн и этому собственному значению соответствует толщина слоя h_i .

Обозначим $G(\gamma) := F(h_i, \gamma)$. Пусть $\varepsilon > 0$ – погрешность нахождения собственного значения. Пусть интервал $(\underline{\gamma}_1, \bar{\gamma}_1)$ такой, что $G(\underline{\gamma}_1)G(\bar{\gamma}_1) < 0$. Обозначим $\tilde{\gamma} \in (\underline{\gamma}_1, \bar{\gamma}_1)$ искомое собственное значение.

Определим середину отрезка $\gamma_1 = \frac{\underline{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_1}{2}$ и вычислим значение $G(\gamma_1)$. Проверяем следующие условия:

1. Если $|G(\gamma_1)| < \varepsilon$, то γ_1 – искомое приближенное собственное значение.
2. Если $G(\underline{\gamma}_1)G(\gamma_1) < 0$, то $\tilde{\gamma} \in (\underline{\gamma}_1, \gamma_1)$. Тогда полагаем $\underline{\gamma}_2 := \underline{\gamma}_1$ и $\bar{\gamma}_2 := \gamma_1$, и, значит, приближенное собственное значение $\tilde{\gamma}_2 \in (\underline{\gamma}_2, \bar{\gamma}_2)$.
3. Если $G(\gamma_1)G(\bar{\gamma}_1) < 0$, то $\tilde{\gamma} \in (\gamma_1, \bar{\gamma}_1)$. Тогда полагаем $\underline{\gamma}_2 := \gamma_1$ и $\bar{\gamma}_2 := \bar{\gamma}_1$, и, значит, приближенное собственное значение $\tilde{\gamma}_2 \in (\underline{\gamma}_2, \bar{\gamma}_2)$.

Выполнив n итераций, получаем, что искомое приближенное собственное значение $\tilde{\gamma}_n \in (\underline{\gamma}_n, \bar{\gamma}_n)$. Ясно, что $|\bar{\gamma}_n - \underline{\gamma}_n| = 2^{-n}|\bar{\gamma}_1 - \underline{\gamma}_1|$. Выберем n таким образом, чтобы $\frac{1}{2^n}|\bar{\gamma}_1 - \underline{\gamma}_1| < \varepsilon$. Тогда за приближенное собственное значение $\tilde{\gamma}_n$ можно принять, например, середину отрезка $(\underline{\gamma}_n, \bar{\gamma}_n)$, т.е. $\tilde{\gamma}_n = \frac{\underline{\gamma}_n + \bar{\gamma}_n}{2}$.

Теорема 3. Пусть $F(\underline{\gamma}_1)F(\bar{\gamma}_1) < 0$, выполняются условия теоремы 1 и $\{\tilde{\gamma}_n\}$ – последовательность приближенных собственных значений, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\gamma}_n = \tilde{\gamma}$.

Для задачи P_E имеет место аналогичная теорема.

Теорема 4. Пусть $F(\underline{\gamma}_1)F(\bar{\gamma}_1) < 0$, выполняются условия теоремы 2 и $\{\tilde{\gamma}_n\}$ – последовательность приближенных собственных значений, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\gamma}_n = \tilde{\gamma}$.

Результаты расчетов

Нелинейность с насыщением (ТМ-волны). Диэлектрическая проницаемость внутри слоя является скалярной функцией и имеет вид

$$\varepsilon = \varepsilon_2 + \varepsilon_0 \frac{\alpha (|E_x|^2 + |E_z|^2)}{1 + \beta (|E_x|^2 + |E_z|^2)},$$

результаты расчетов дисперсионных кривых представлены на рис. 3 слева.

Керровская нелинейность (ТЕ-волны). Диэлектрическая проницаемость внутри слоя имеет вид

$$\varepsilon = \varepsilon_2 + \varepsilon_0 \alpha |\vec{E}|^2,$$

результаты расчетов дисперсионных кривых представлены на рис. 3 справа.

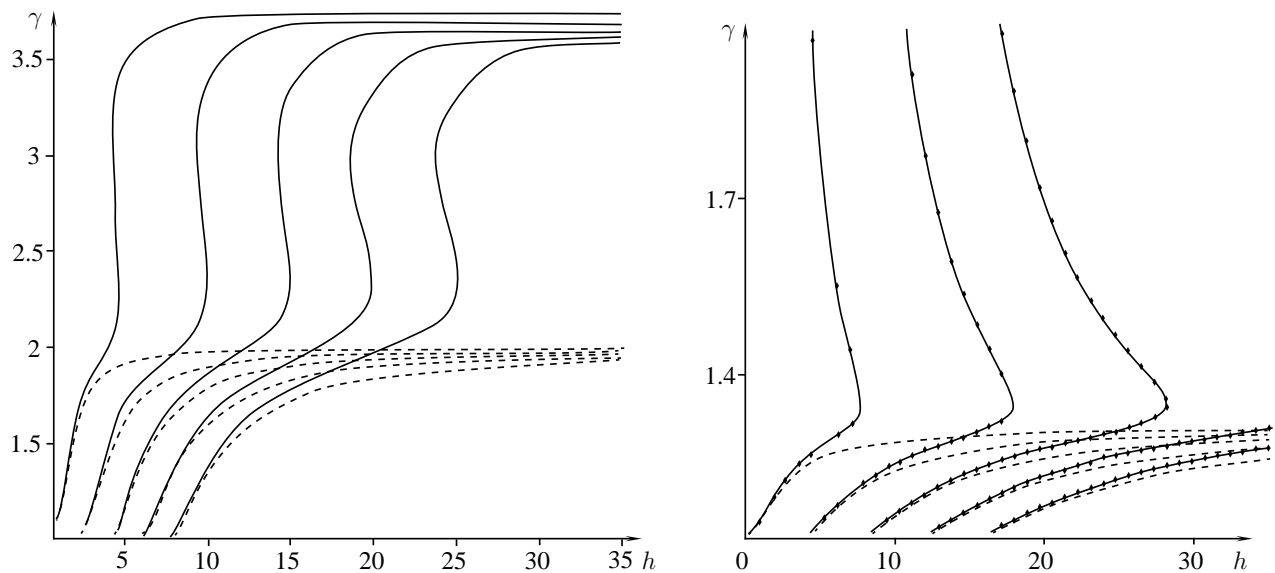


Рис. 3. Дисперсионные кривые для линейного (пунктирные линии) и нелинейного (сплошные линии и ромбы) слоев: слева – $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 4$, $\varepsilon_3 = 1$, $Z_0 = 1$, $\alpha = 0.001$, $\beta = 0.001$; сплошные кривые рассчитаны с помощью предложенного в этой диссертации метода; справа – $\varepsilon_1 = 1.1$, $\varepsilon_2 = 1.7$, $\varepsilon_3 = 1.1$, $\alpha = 0.02$, $Y_h = 1$; сплошные кривые рассчитаны МИДУ, ромбы вычислены с помощью предложенного в этой диссертации метода

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в научных изданиях, рекомендованных ВАК РФ

1. Зарембо, Е. В. Об одном численном методе решения нелинейной краевой задачи на собственные значения для электромагнитных ТМ-волн, распространяющихся в слое с керровской нелинейностью / Е. В. Зарембо // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 1. – С. 75–82.

2. Зарембо, Е. В. Численный метод решения нелинейной краевой задачи на собственные значения для электромагнитных ТЕ-волн, распространяющихся в слое с произвольной нелинейностью / Е. В. Зарембо // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 2. – С. 60–75.

3. Зарембо, Е. В. Численный метод решения нелинейной краевой задачи на собственные значения для электромагнитных ТМ-волн, распространяющихся в слое с произвольной нелинейностью / Е. В. Зарембо // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 3. – С. 58–71.

4. Сысова, Е. В. Решение задачи дифракции электромагнитной ТЕ-волны на диэлектрическом слое с нелинейностью некерровского типа / Е. В. Сысова, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Сер. «Естественные науки». – 2006. – № 5. – С. 116–121.

5. *Сысова, Е. В.* Итерационные решения уравнения непараксиальной динамики пространственного спектра монохроматической двумерной ТЕ-волны в среде с кубичной по полю нелинейностью / Е. В. Сысова // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. Сер. «Оптотехника, Оптикоинформатика, Оптические материалы». – 2008. – № 58. – С. 47–50.

Публикации в других изданиях

6. *Сысова, Е. В.* Непараксиальная динамика пространственного спектра монохроматической двумерной ТЕ-волны в среде с кубичной по полю нелинейностью / Е. В. Сысова // Оптикоинформатика, наносистемы и теплотехника : сборник трудов конференции молодых ученых. – СПб. – 2009. – Вып. 3. – С. 162–166.

7. *Zaremba, E. V.* Electromagnetic TM wave propagation in nonlinear multilayered waveguides. Numerical technique to obtain propagation constants / E. V. Zaremba, D. V. Valovik // 2012 International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, Proceedings. – Kharkov, 2012. – P. 105–108.

Научное издание

ЗАРЕМБО Екатерина Викторовна

МЕТОД ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ
НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СОПРЯЖЕНИЯ
НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ТЕ- И ТМ-ВОЛН,
РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В СЛОЕ
С ПРОИЗВОЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Специальность 01.01.02 – Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Редактор А. Г. Темникова
Технический редактор Ф. Д. Фафурин
Компьютерная верстка Е. В. Зарембо

Подписано в печать 10.09.2012. Формат $60 \times 84^1/16$.

Усл. печ. л. 0,98

Заказ № 672. Тираж 100.

Пенза, Красная, 40, Издательство ПГУ
Тел./факс: (8412) 56-47-33; e-mail: iic@pnzgu.ru

